

Application of Approximation in the Design of Geometric Patterns

Investigation of the Grid method in Eight-Fold Geometric Patterns

Mahdi Azizi Hamedani¹
Gholamhossein Memarian²
Asghar Mohammadmoradi³

Abstracts

Geometric patterns can be drawn through multiple methods, including software tools (e.g., AutoCAD, GeoGebra, Geometer's Sketchpad), manual drafting with rulers and compasses, or regular polygonal grids constructed by artists. This article aims to investigate the role of approximation in the design and execution of geometric patterns in Iranian architecture, focusing on a comparison between traditional grid-based (approximate) methods and radial infrastructure methods. The study seeks to address this central question: Why did master artisans use approximate methods in drafting geometric patterns despite their awareness of minor inaccuracies?

The research employs a qualitative methodology with a logical reasoning approach. Within this framework, various manual and traditional drafting techniques (radial and grid-based methods) are examined, representative case studies are reconstructed, and the advantages and limitations of each method are analyzed.

Findings reveal that while the use of approximation in grid-based methods introduces slight deviations in angles and proportions, it offers significant practical benefits. These include: Reduced errors in manual drafting; Simplified area and material calculations; Increased execution speed and ease of training; Enhanced feasibility for developing creative designs in non-workshop environments.

Notably, the grid-based approach streamlines geometric processes, accelerating pattern execution on materials such as wood, tile, and glass, while eliminating the need for complex computations. The results ultimately emphasize that approximation was employed in Iranian architectural tradition not merely as a constraint, but as an intelligent solution to harmonize geometric precision with artistic creativity and practical efficiency.

Keywords: Geometric Patterns, Approximation, Gereh, Grid Method

1. PhD student in Architecture, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.
mahdyhamedany@gmail.com

2. Professor, Department of Architecture, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran (corresponding Author).
memarian@iust.ac.ir

3. Professor, Department of Restoration and Rehabilitation of Historic Buildings and Sites, School of Architecture and Environmental Design, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.
m_moradi@iust.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۸/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۲۸

کاربرد تقریب در طراحی و اجرای نقوش هندسی

بررسی شبکه زیر ساخت شطرنجی در ترسیمات نقوش هندسی هشت^۱

مهدی عزیزی همدانی^۲

غلام حسین معماریان^۳

اصغر محمدمرادی^۴

چکیده

روش‌های متعددی برای ترسیم نقوش هندسی وجود دارد. ترسیم با نرم‌افزارهایی مانند اتوکد (autocad) و یا جنوجبرا (GeoGebra) و اسکچپد جنومتر (Sketchpad geometer) و یا ترسیم دستی نقوش هندسی با ابزار خطکش و پرگار و یا شبکه اشکال منتظم انجام می‌گردد. هدف کلی این مقاله بررسی نقش تقریب در طراحی و اجرای نقوش هندسی در معماری ایران، با تمرکز بر مقایسه روش‌های سنتی مبتنی بر شبکه شطرنجی (تقریبی) و روش‌های زیرساخت شعاعی است. پژوهش حاضر در پی پاسخگویی به این پرسش اصلی است که چرا استادکاران، علی‌رغم آگاهی از خطاهای جزئی، از روش‌های تقریبی در ترسیم نقوش هندسی استفاده کرده‌اند. روش تحقیق به صورت کیفی و با رویکرد استدلال منطقی انجام شده است. در این راستا، شیوه‌های مختلف ترسیم دستی و سنتی (شبکه شعاعی و شطرنجی) بررسی، نمونه‌های شاخص بازسازی، و مزایا و محدودیت‌های هر روش تحلیل شده است.

یافته‌ها نشان می‌دهند که استفاده از تقریب در شبکه شطرنجی، با وجود ایجاد انحرافات جزئی در زوایا و تناسبات، مزایای عملی قابل توجهی داشته است. این مزایا شامل کاهش خطاهای ناشی از ترسیم دستی، تسهیل محاسبات مساحت و مصالح، سرعت در اجرا و آموزش، و امکان توسعه طرح‌های خلاقانه در محیط‌های غیرکارگاهی است. به‌ویژه، شبکه شطرنجی با ساده‌سازی فرایندهای هندسی، اجرای نقوش روی مصالحی مانند چوب، کاشی، و شیشه را تسریع کرده و نیاز به محاسبات پیچیده را مرتفع ساخته است. نتایج نهایی تأکید می‌کنند که تقریب نه تنها به عنوان یک محدودیت، بلکه به مثابه راه‌حلی هوشمندانه برای ترکیب دقت هندسی با خلاقیت هنری و سهولت اجرایی در سنت معماری ایران به کاررفته است.

کلیدواژه‌ها: نقوش هندسی، تقریب، گره، شبکه شطرنج

۱. این مقاله برگرفته از رساله دکتری مهدی عزیزی همدانی با عنوان تدوین روشی بهینه در فهم نقوش هندسی است.

mahdyhamedany@gmail.com

۲. دانشجوی دکتری معماری، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

memarian@iust.ac.ir

۳. استاد گروه معماری، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران (نویسنده مسئول).

m_moradi@iust.ac.ir

۴. استاد گروه مرمت دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

۱. مقدمه

ترسیم نقوش هندسی و زیرساخت چندضلعی‌های منتظم در روش‌های سنتی و دستی که تاریخ آرایه‌ها به مان‌شان می‌دهد با آنچه اکنون از ابزار در اختیار طراحان می‌گذارد بسیار متفاوت است. نرم‌افزارهایی از جمله نرم‌افزارهایی مانند اتوکد (autocad) و یا جئوجبرا (GeoGebra) و اسکچپد جئومتر (Sketchpad geometer) و یا سایر نرم‌افزارها کمک فراوان و ابزارهای متعددی را در اختیار هنرجویان و طراحان قرار می‌دهد و از بسیاری از مسائل هندسی پیچیده در محاسبه و طراحی و ترسیم بی‌نیاز می‌نماید. ترسیم به روش دستی نیازمند دقت فراوان بوده و خطاهای جزئی در ترسیم همیشه تا حدی مشاهده می‌شده است. ترسیم دستی یک پنج‌ضلعی در یک زمینه دایره باتوجه به شعاع دوایر مورد نیاز برای ترسیم تا حدی خطا را ایجاد می‌نماید. استادکاران در گذشته با فن یا تکنیک‌هایی که ممکن بود مقداری خطا داشته باشند نسبت به ترسیم دستی نقوش هندسی دست می‌برده و سپس سعی در ترسیم دقیق‌تر نقوش داشته‌اند؛ لذا می‌توان گفت که استفاده از تقریب تا ترسیم نقوش هندسی کاربرد داشت است. روش‌های متعددی برای ترسیم نقوش هندسی نام‌برده شده است و در اسناد تاریخی مشاهده می‌شود. روش زیرساخت شعاعی که با ابزار خط کش و پرگار انجام می‌پذیرفته است از روش‌هایی است که سابقه هزارساله دارد. روش دیگر ترسیم مبتنی بر شبکه منتظم زیر ساخت چندضلعی است که در اسناد تاریخی و طومارهای باقی‌مانده در چند قرن اخیر مشاهده می‌شود. ترسیمات در این روش‌ها خطاهایی را ممکن است ایجاد نماید. ترسیم در زیرساخت شبکه‌ای

کلیات ترسیم را تا حدود زیادی مصون از خطا نگه می‌دارد لیکن ترسیم آلات یا واگیره‌ها در نقوش هندسی شبکه شطرنجی را دچار اعوجاج می‌نماید. سؤال اصلی این است که چرا استادکاران با علم به این موضوع از این روش در ترسیم نقوش هندسی بهره برده‌اند؟ و با علم به این موضوع از شبکه زیرساخت شطرنجی در طراحی استفاده کرده‌اند؛ لذا سعی می‌شود با استدلال‌های ریاضی و هندسی و اجرایی و طراحانه دلیل این موضوع را روش کرده و دلایل استفاده از تقریب در طراحی و اجرای نقوش هندسی بیان گردد.

۲. پیشینه و مبانی نظری پژوهش

پژوهش‌های انجام شده در خصوص نقوش گره در حوزه‌های مختلفی است: در حوزه‌های معاشناسی (بررسی مفاهیم پنهان در نقوش هندسی)، زیباشناسی (بررسی تناسبات و ارزش‌های زیباشناسی نقوش)، بررسی کاربردهای مختلف گره، حوزه‌های ترسیمی (چگونگی ترسیم گره‌ها) و در حوزه محاسبات و حوزه برنامه‌نویسی. این مقاله در حوزه ترسیم نقوش هندسی و روش‌های آن متمرکز شده است.

منابع موجود درباره ترسیم نقوش هندسی به سه دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شوند:

۱. کتب و رساله‌های تاریخی
 ۲. روش‌های استادکاران سنتی و معاصر به صورت دستی
 ۳. روش‌های ریاضی‌دانان و محققین معاصر
 ۴. روش محاسباتی و برنامه‌نویسی
- از میان منابع مکتوب می‌توان به رساله فی‌تدخال الاشکال المتشابهه و المتوافقه از ابو اسحاق ابن عبدالله کوبنانی اشاره کرد (Necipoğlu, 2017).

دیگر منبع مکتوب در این باره طومار توپکابی است (Necipoğlu, 1995). یکی دیگر از این اسناد مجموعه طومارهای میرزا اکبر مربوط به سنت گره سازی در ایران است که در حال حاضر در موزه ویکتوریا نگهداری می‌شود. این مجموعه شامل ترسیمات هندسی اجزای مختلف بنا از جمله رسمی‌بندی و گره است (Bodner, 2012).

روش‌های ترسیم نقوش هندسی توسط استادکاران سنتی متنوع است. از این مجموعه آثار می‌توان به روش‌های ترسیم استادان متعددی مانند استاد لرزاده (رئیس‌زاده، ۱۳۹۸)، استاد شعرباف (شعرباف، ۱۳۸۵)، علی‌اکبر حلی (حلی، ۱۳۶۵)، محمود ماهرالنقش (ماهرالنقش، ۱۳۶۱)، حسین زمرشیدی (زمرشیدی، ۱۳۶۵)، محمد گلیار (گلیار، ۱۳۹۹) و جواد شفایی (شفایی، ۱۳۹۹) نام برد که نسبت به طراحی نقوش هندسی دست برده‌اند. بیشتر این روش‌ها مبتنی بر استفاده از شبکه‌های شعاعی است که ابزارش از قبیل پرگار و خط کش است (حاجبی، ۱۳۹۵).

این مقاله به دو روش اول به‌عنوان منابع اصلی توجه نموده و مشخص گردید که در کتب مرجع بیشتر به موضوع نحوه ترسیم نقوش هندسی پرداخت شده است و موضوع چرایی و علل استفاده از تقریب در نقوش هندسی موضوع آنها نبوده است. رساله‌ها و مقالات متأخر نیز بیشتر به موضوع محاسبات پارامتریک و ترسیمات رایانه‌ای پرداخته‌اند و موضوع ترسیمات دستی و یا طراحی نقوش به روش‌های سنتی موضوع بحث آنها نبوده‌اند.

۳. روش تحقیق

این پژوهش با رویکرد کیفی و راهبرد استدلال منطقی انجام شده است. در این روش سلسله عوامل و پدیده‌های به‌ظاهر متفاوت می‌توانند در

یک سامانه تبیین شوند و با یکدیگر مرتبط گردند (وانگ، ۱۳۸۸) در گام نخست، شیوه‌های متفاوت برای ترسیم نقوش هندسی بررسی شد. انتخاب شیوه‌ها بر پایه قابلیت بازسازی نقوش پیچیده، وضوح مراحل، امکان‌پذیری ترسیم دستی، و منطق‌پذیری هندسی انجام شد. در هر شیوه، یک یا چند نمونه شاخص از نقوش هندسی با استفاده از روش مورد نظر بازسازی گردید و مراحل ترسیم به‌صورت عملی پیاده‌سازی شد. کیفیت نتایج بر اساس معیارهایی چون دقت هندسی، امکان کاهش خطا، قابلیت اجرای دستی و نرم‌افزاری، و میزان کمک به خلاقیت مورد ارزیابی قرار گرفت. بدین منظور ابتدا سابقه‌ای از استفاده از تقریب توسط اساتید هنر سنتی بیان شده تا گستره استفاده از تقریب در نقوش هندسی مشخص شود و در مرحله بعد چرایی استفاده از ترسیمات تقریبی در نقوش هندسی مورد بررسی قرار گرفته و این مسیر ویژگی‌های تقریب در ترسیمات هندسی استخراج شده است.

در پایان، با تطبیق نتایج به‌دست‌آمده و تحلیل کیفی آنها، مزایا و محدودیت‌های دو روش تقریبی و ترسیم دقیق هندسی استخراج شده و پیشنهادهایی برای بهره‌گیری از این شیوه‌ها در آموزش، طراحی، و تولید آثار جدید ارائه شد.

۴. بحث‌ها و یافته‌ها

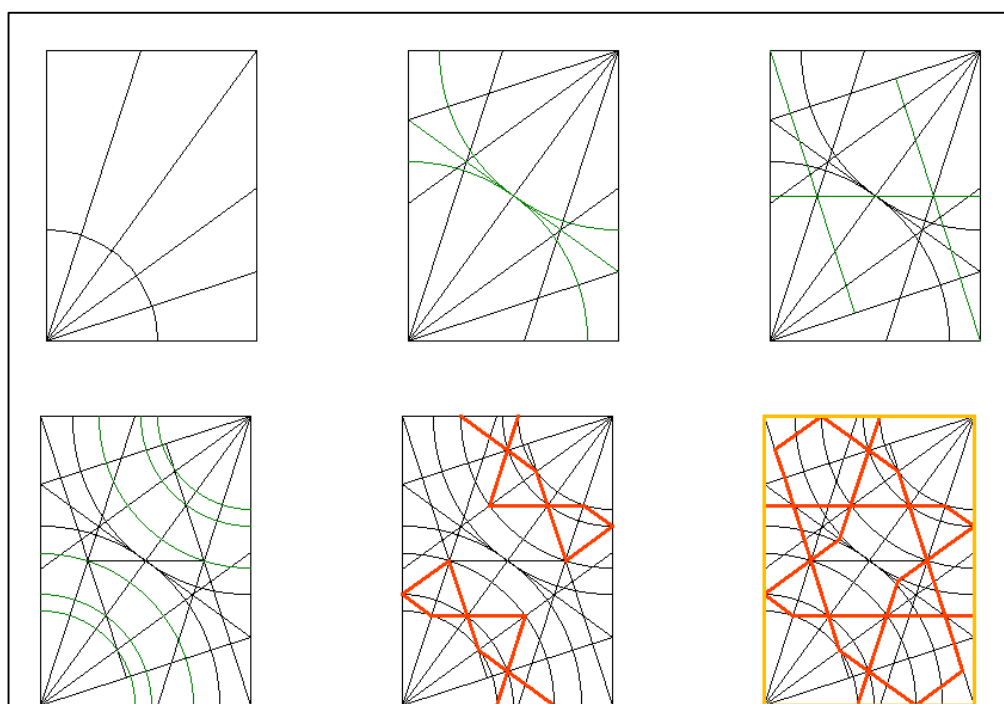
۴.۱. انواع روش‌های ترسیم نقوش هندسی

منشأ ترسیم نقوش هندسی را باید در هندسه عملی جست‌وجو کرد جایی که هنرمندان سنتی برای پیاده‌سازی هنر خود نیازمند ترفندهایی هندسی بودند. کتاب *النجاره* یا «فی ما یحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسیه» یکی از آثار مهم

نسبت به ترسیم آلات گره‌چینی اقدام می‌شود این روش در واقع از یک متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است که می‌تواند به وسیله قرینه‌سازی؛ مانند یک کاغذ چهارلا به یک الگوی کامل شمشه‌ای تبدیل و با انتقال یک بافت تزیینی را شکل دهد. کتاب گره و کاربردی استاد شعرباف (شعرباف، ۱۳۸۵) و استاد لرزاده در کتاب /حیای هنرهای /زیادرفته (رئیس‌زاده، ۱۳۹۸)، از این روش استفاده نموده‌اند. استادان گره ساز برای ترسیم گره‌های ده معمولاً محدوده مستطیل‌شکلی از گره را انتخاب می‌کنند این محدوده چنان است که اگر گرفته تکرار شود تمام این نقش را می‌سازد سپس نحوه ترسیم این واحد را به روش هندسی توضیح می‌دهند و گره انتخاب شده اغلب شامل یک‌چهارم از شمشه‌ها و منطقه‌ای بین آنهاست (شعرباف، ۱۳۸۵) و درست در همین نقطه میانی است که آلت‌های پیرامون شمس‌ها با یکدیگر برخورد می‌کنند و ترکیبات پیچیده‌ای را پدید می‌آورند اهمیت نقطه تا حدی است که در

ابوالوفاء بوزجانی (۳۲۸-۳۸۸ق) در هندسه عملی تعداد زیادی از این روش‌ها را جهت ارتقای دانش فنی ساخت نشان می‌دهد. (طاهری، ۲۰۱۱) تا کنون روش‌های متعددی برای ترسیم نقوش هندسی ابداع و توسعه داده شده است که در این مقاله سعی می‌شود روش‌های مبتنی بر ترسیم دستی تشریح گردد. ترسیم نقوش هندسی شامل ۴ مرحله است. این ۴ مرحله شامل ترسیم چارچوب، ترسیم شبکه زیرساختی یا شبکه گره، ترسیم آلات هندسی و توسعه چهارچوب می‌باشد. روش‌های ترسیم نقوش به صورت دستی عموماً در مرحله ترسیم شبکه زیرساخت متفاوت می‌شوند که در اینجا به دو روش پرداخته خواهد شد.

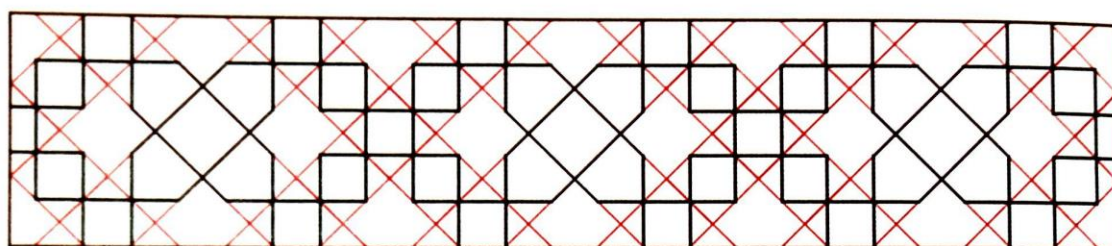
۲.۴. ترسیم مبتنی بر شبکه زیرساخت شعاعی
روش ترسیم گره‌ها به وسیله اتصال فاصله بین دو گره بیشتر در روش‌های سنتی ترسیم گره‌ها دیده می‌شود. در این روش میان دو مرکز شمشه



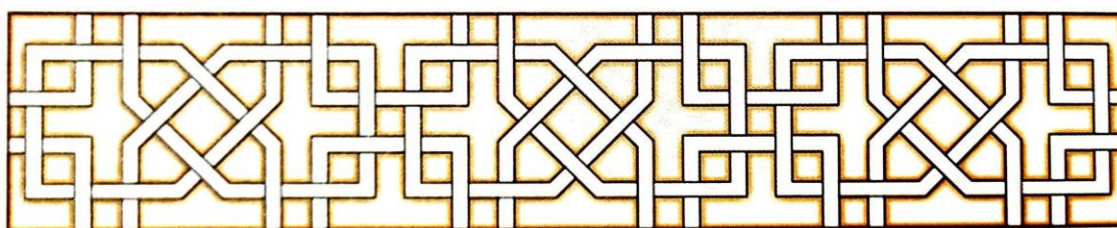
تصویر ۱. ترسیم گره طبل ده با روش زیرساخت شعاعی (روش استادکاران و قدما)، (ترسیم از نگارنده)

بسیاری از مواقع نقش را با نام آلت‌های واسطه این منطقه می‌خوانند شیوه‌ای که بیان شد طریقه رسم یک واحد از نقشه معلوم می‌شود و در نتیجه تکرار این واحد کل نقش به دست می‌آید. (حاجی‌قاسمی، ۱۳۹۰: ۲۰۰) متوازی‌الاضلاعی که بیشتر در الگوهای گره‌چینی به صورت مربع و یا مستطیل دیده می‌شود از بخش‌های کوچک‌تری نیز تشکیل شده است در کتاب هم آراستگی در نگاره‌های اسلامی (شاکر سلمان، ۱۳۸۳) ۲۵۰ الگو و یا واحد تکرارشونده معرفی شده است که می‌تواند از ناحیه زایا و یا محدوده بنیادی تشکیل شده باشد. این ناحیه که یک دوازدهم واحد تکرارشونده (متوازی‌الاضلاع) است با تقارن محوری و چرخش سه ترک و بازتاب می‌تواند واحد تکرارشونده را بسازد.

می‌تواند بر روی شبکه ایزومتریک تولید شود. اغلب نقوش ایجاد شده در شبکه ایزومتریک دارای خطوطی هستند که با شبکه آنها متجانس است. شبکه ایزومتریک پیچیده‌تر در شش جهت دارای خط است که سه عدد عمود بر شبکه‌اند. استفاده از سیستم‌های چندضلعی برای ایجاد نقوش هندسی اسلامی را می‌توان در دوره شکل‌گیری این سنت جست‌وجو کرد، و اولین سیستمی که به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است، سیستم چندضلعی‌های منظم است. این باعث می‌شود که از مثلث منظم، مربع، شش‌ضلعی و ده‌ضلعی به‌عنوان مدول‌های تکرارشونده استفاده شود که خطوط نقوش آلات هندسی روی آنها پیاده می‌شود. تنوع طرح‌های تاریخی که می‌توان از چندضلعی‌ها در روش چندضلعی متشکل از ترکیبات مختلف آلات هندسی



A



تصویر ۲. ترسیم گره چلیپا در زمینه هشت که با استفاده از شبکه زیرساخت شطرنجی ترسیم شده است. (جی بونر، ۲۰۱۷)

۳،۴. ترسیم مبتنی بر شبکه منظم زیر ساخت (زیرساخت چندضلعی و شطرنجی)

در این روش با استفاده از شبکه شطرنجی متعامد و یا لوزی می‌توان نقوش هندسی را بر روی خطوط شبکه پیاده‌سازی کرد. برخی از اولین نقوش کمتر پیچیده

ایجاد کرد، به طرز حیرت‌انگیزی زیاد است. ابتدایی ترین آنها البته طرح‌هایی است که از سه ضلعی‌های منظم مشتق شده است: شبکه مثلثی، شبکه مربع و شبکه شش ضلعی (Bonner, 2017: 200).

داده و انواع مختلف استفاده از آن را بهینه کرده است. از روش چند ضلعی‌ها صرفاً در این مقاله به شبکه زیرساخت منظم چهار ضلعی پرداخته می‌شود و سایر شبکه‌های زیرساخت با توجه به عدم ارتباط آن به موضوع تقریب در نقوش هندسی صرف‌نظر شده است.

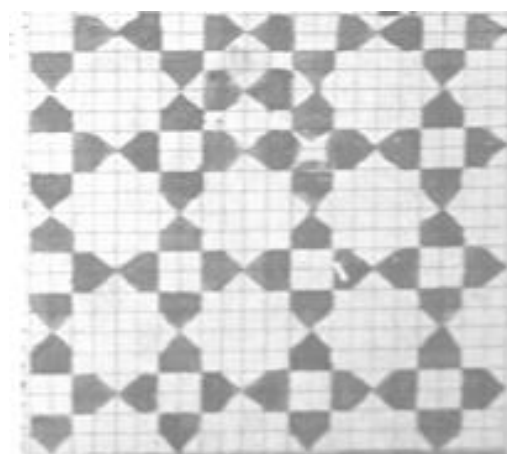
شبکه شطرنجی در نقوش هندسی در تاریخ نقوش هندسی قابل بررسی است. این‌گونه از طرح‌ها شامل بسیاری از چلیپاهای شکسته و الگوهای کلیدی همچنین موتیف‌های خوشنویسی کوفی هستند و ماهیت متعامد این نوع طرح را با تزیین آجری انجام شده به وسیله غزنویان و قراخانیان



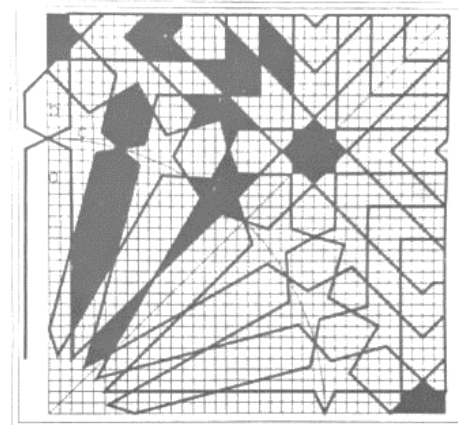
تصویر ۵. گره هشت و طبل ترکیب شده با خط بنایی در طومار توپکایی (استفاده از تقریب در نقوش هندسی)

و غوریان و سلجوقیان مرتبط می‌کند. در کاشی معرق هفت‌رنگ تیموری الگویی از شبکه متعامد دیده می‌شود و همچنین شکل – یک طرح در منار اوزکند در قرقیزستان قرن دوازده در شبکه متعامد با خطوط قطری ۴۵ درجه را نشان می‌دهد. (Bonner, 2017) در طومار توپکایی که بنا بر نظر خانم نجیب اوغلو متعلق به قرن نهم یا دهم هجری قمری و در ایران تهیه شده است، برای ترسیم گره از روش شبکه‌ای استفاده شده که

روش چند ضلعی‌ها^۱ یکی از روش‌های مورد



تصویر ۳. تصویری از ترسیم گره هشت چلیپا در شبکه شطرنجی در توومار میزرا علی اکبر در کتاب هندسه و تزیین در معماری اسلامی (نجیب‌اوغلو، ۱۳۸۸)

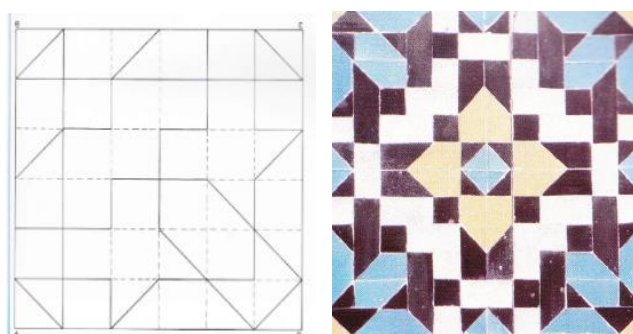


تصویر ۴. ترسیم گره شانزده با ستاره‌های کشیده (عامر شاکر، ۱۳۸۳، ۸۱)

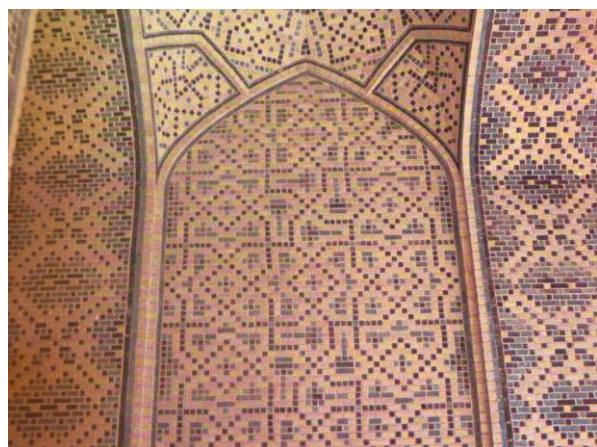
بحث جدید است که در موضوع یافتن قواعد هندسی نقوش هندسی در سال‌های مورد توجه قرار گرفته است. افراد مختلفی این روش را برای تحلیل و ترسیم نقوش هندسی به کار گرفته‌اند. جی بونر^۲ در کتاب نقوش هندسی اسلامی (Bonner, 2017:200) سعی می‌کند با روش چندضلعی‌ها تحلیلی از تحولات نقوش هندسی در تاریخ هنر اسلامی و سرچشمه‌های آن ارائه دهد. پروفیسور میراک مجیسکی^۳ در چند مقاله و کتاب این روش را توسعه

ترکیبی از خط بنایی و ترسیمات نقوش هندسی دیده می‌شود (نجیب اوغلو، ۱۳۸۹) (تصویر ۵).

۴.۴. استفاده از تقریب در ترسیم نقوش هندسی
استفاده از تخمین و تقریب در ترسیمات هندسی سابقه زیادی دارد و در انواع گوناگونی می‌توان آن را مشاهده کرد. برای مثال برای رسم شمسه ۹ که مبتنی بر رسم نه ضلعی منتظم است راه‌های تقریبی یافتند که مشکل می‌توان باور کرد که با آزمون و خطا به دست آمده باشد. این موضوع در رسم چند ضلعی‌ها به وفور در مقرنس‌کاری کاشی‌کاری و کاربردی برای رسم سه پری ۴ پری ۵ پری و انواع شمسه ۶ و ۷ قابل استفاده است. (لنجانی، ۱۳۹۵: ۷۲)



تصویر ۶. شش و چهارلنگه (ماهرالنقش، ۱۳۶۵، ۸۱)



تصویر ۷. شبکه معقلی در مدرسه چهار باغ اصفهان - هشت سلی سکرون دار

تقریب‌ها در ترسیم گره‌های چهار و هشت و شانزده به روش شبکه مربع‌ها کاربرد دارد. به‌طور مثال در ترسیم گره‌های هشت می‌توان از این شبکه‌ها استفاده کرد که تقریباً درست است هرچند با ترسیم به روش پرگار و خط‌کش و ساختار شعاعی ترسیم دقیق و صحیح به‌دست می‌آید. لیکن روش تقریبی شبکه‌ای امکان تجربه سریع‌تر انواع نقوش را فراهم می‌کند. در ترسیم گره شمسه و پیلی و گره هشت و چهارلنگه و گره هشت و چهارلنگه طبل می‌توان به‌عنوان سه مثال این تقریب مشاهده نمود. این روش در طومار میرزا علی اکبر^۴ نیز در گره هشت سلی مشاهده می‌گردد که نشان از سابقه تاریخی این روش دارد.

ترسیم گره‌های هشت در شبکه شطرنجی باعث می‌گردد آلات گره از شکل اصلی خود خارج شده و متفاوت از آنچه در ترسیمات شعاعی دیده می‌شود به نظر برسند؛ اما شبکه شطرنجی این امکان را می‌دهد تا به‌صورت تقریبی بتوان یک گره را با سرعت ترسیم نمود و یا انواع مختلفی از آلات را در کنار یکدیگر قرارداد مزیت بررسی انواع گره‌ها در طراحی می‌تواند بر اشکال ناصحیح بودن حالات غلبه کند در کتب ترسیمات هندسی نیز می‌توان به ترسیم گره‌های ۸ و ۱۶ در شبکه شطرنجی دست یافت.

استاد ماهرالنقش در کتاب خود ترسیمات گره هشت را در شبکه شطرنجی انجام داده است. لیکن شمسه‌ها در شبکه بزرگتر قرار گرفته‌اند تا خطای کار کمتر گردد (ماهرالنقش، ۱۳۶۱). در کتاب هم آراستگی نگاره‌های اسلامی عمر شاکر نیز نمونه‌ای از گره ۱۶ را در شبکه شطرنجی پیاده‌سازی کرده است (شاکرسلیمان، ۱۳۸۳).

در کتاب هندسه و تزیین در معماری اسلامی

گره را در آن نداریم و خطوط به صورت شطرنجی دیده می شود و درواقع شبکه شطرنجی شبکه راهنمای ترسیم نیست؛ بلکه خود شبکه ساختاری ترسیم گره است. همین روش در ترسیم خط بنایی ساده و خط بنایی آزاد استفاده می شود. کشاورزی میاندشتی در کتاب بنای خط بنایی، انواع استفاده از زمینه شطرنجی در طراحی انواع خط بنایی را توضیح داده و ترکیب این خطوط با ترسیمات هندسی را استفاده کرده است. نکته مهم اینکه باید تمایزی بین ترسیمات آرایه های معقلی که در خط بنایی و به صورت مجزا استفاده می شود با ترسیمات نقوش هندسی در زمینه شطرنجی قایل شد. این ترسیمات از تقریب استفاده نمی کنند.

که طومار توپکاپی در آن منتشر شده نیز می توان نقوشی را دید که در شبکه شطرنجی پیاده سازی شده اند همچنین کاربرد شبکه شطرنجی در طراحی خط بنایی و تزیینات معقلی در کنار هم قابل مشاهده است (نجیب اوغلو، ۱۳۸۹).

اینکه گره در چه مقیاسی از شبکه شطرنجی قرار بگیرد موضوعی است که بسته به دقت و شرایط طراحی می تواند تغییر یابد. یک متخصص باتجربه شبکه متعامد می تواند با ایجاد الگوی هندسی پیچیده تر با تقارن تکراری چهارگانه استفاده نماید. نقوش می تواند با الگوهای با ستاره چند پر اعمال شود که چندبرابر هشت هستند و حتی شامل ستاره شصت و چهار پر می شوند.



تصویر ۸. از راست ترسیم خط بنایی - خط بنایی با حاشیه - چلیپا به صورت معقلی - ترسیم خط بنایی متن الحکم لله به صورت قرینه سازی و در پایین خط بنایی آزاد (نجیب اوغلو، ۱۳۸۸)

ژان ماک کاسترا امکانات این روش در شبکه متعامد را نشان داده است و او نام این روش را دست آزاد می گذارد.^۵ روش شناسی او نیاز به عدم تطابق بین مختصات متعامد و قطری دارد و این تقریب ها پذیرفته در نظر گرفته می شود.

باید توجه کرد که این ترسیمات گره با آنچه ما در ترسیمات معقلی می شناسیم متفاوت است در ترسیمات معقلی هر واحد شبکه شطرنجی می تواند ۱ نقطه و یک کاشی مستقل از مجموعه شمس و آلات هندسی باشد و خطوط به هم پیوسته از آلات

پروفسور کاسترا^۶ در کلاس‌های آموزشی خود^۷ شبکه شطرنجی که متشکل از چهار مربع بود را برای شمس در نظر می‌گرفت. در این روش با محاسبه ریاضی نشان داده می‌شد که در ترکیب دو آلت شمس و سفت خطای ترسیم به حداقل رسیده و می‌توان از خطای به‌وجود آمده در شبکه شطرنجی گذر کرد. مطابق فرمول طول یک سفت و شمس برابر ترسیمات ذیل به این روش ایشان انجام شده است.

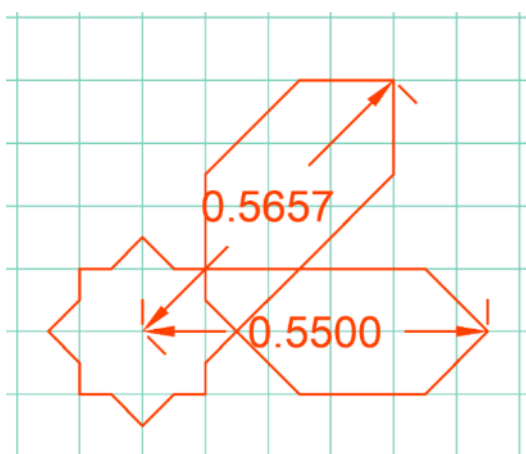


تصویر ۹. این تصویر نمونه‌ای از ترسیمات دستی پرفسور کاسترا است.
منبع <http://www.castera.net/entrelacs/entrelacs.htm>

کاسترا در مورد تقریب می‌گوید: از آنجایی که خطاهای ناشی از تقریب کاملاً آگاهیم برای ما ساده است که در صورت لزوم اصلاحاتی انجام دهیم. برای مثال ما مایل به ساخت یک موزاییک واقعی باشیم. در این روش هر زمان یک قسمت جدید ایجاد کنیم تناسبات درستی پیاده شده و از لحاظ هندسی در قسمت‌های قبلی که ترسیم شده است تحلیل می‌رود.

۵.۴. نمونه پیاده‌سازی گره‌های هشت در شبکه مربع و تفاوت آن با ترسیمات صحیح هندسی
در این بخش نمونه‌ای از گره‌های مراکشی را به روش صحیح ترسیم کرده و سپس خطوط اصلی آن را در ترسیمات شبکه‌های شطرنجی مقایسه کرده‌ایم که نشان می‌دهد در یک طرح کلی خطاهای ترسیم بسیار ناچیز بوده و قابل چشم‌پوشی است. در مجموع باید گفت که استفاده از روش شبکه زیرساخت شطرنجی و به‌صورت دقیق‌تر استفاده از تقریب در ترسیم نقوش هندسی خطاهای ترسیم ایجاد می‌نماید. این خطاها هرچند مختصر باشد باید دلیلی برای استفاده از آن در تاریخ معماری و هنر یافت. در غیر این صورت عملی اشتباه تلقی شده که باید آن را انحراف در سیر تکاملی آرایه‌های هنری دانست.

۶.۴. تحلیل دلایل و مزیت‌های ریاضی و هندسی استفاده از ترسیمات تقریبی در گره همان‌طور که گفته شد تقریب در نقوش هندسی خطاهای جزئی ترسیمی را به همراه دارد و این امر



$$x = 5.5 \times 1 = 5.5$$

$$y = 4 \times \sqrt{2} = 5.65^y$$

تصویر ۱۰. ترسیم یک شمس هشت و سفت و محاسبه اندازه‌ها در جدول مشخص است. (ترسیم نگارنده)

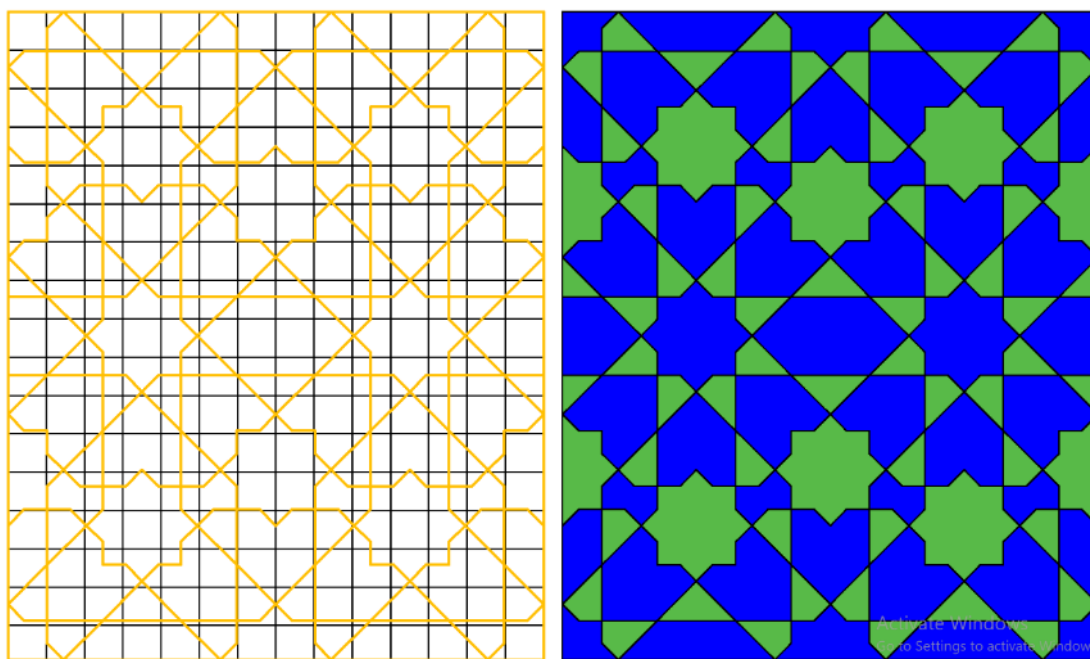
دشوار و در بعضی از موارد وقت گیر است و همچنین ممکن است این روش صحیح نیز به علت خطای ترسیمات دستی دچار ناراستی گردد که در حالت تخمینی نیز این نقص وجود دارد. ساده ترین شکل این نقص در ترسیم گره ده مشاهده می گردد. در تقسیم یک دایره به بیست قسمت عموماً خطای ترسیم رخ می دهد و گاهی این خطا از تقسیم یک چهارم دایره به ۵ قسمت کمتر خواهد بود. علت این امر روش ترسیم ۵ ضلعی است که چند کمان هایی نیاز دارد و کمان سوم طول کوتاهی دارد که باعث می شود نقاط برخورد کمان ها خطا ایجاد نمایند. به تجربه برای نگارنده ثابت شده است که پس از تقسیمات گره ده مجدداً به روش تخمینی (چک کردن تمام تقسیمات با پرگار تقسیم divider) ترسیم را چک نمایم. استاد شعرفاف^۸ در کلاس های آموزش گره و کاربندی در فرهنگستان هنر^۹ در ترسیم گره ها از روش ترسیمی بالا استفاده نمی کرد و با آزمون و خطا اندازه دهانه پرگار برای تقسیمات گره ده و سایر

باید دلائلی داشته باشد که منجر به استفاده در تاریخ نقوش هندسی شده است. در ذیل دلائلی که با بررسی نقوش هندسی و ترسیم آن به روش دستی به دست آمده است بیان می گردد که نشان می دهد استفاده از این روش توجیه پذیر بوده و می توان از آن استفاده نمود.

به عنوان مثال اگر نه وجهی با کمان ترسیم کنیم درحالی که نتیجه نهایی از لحاظ تئوری درست است، ترسیم واقعی تنها به عنوان یک مهارت ترسیمی و ابزار مناسب درخت خواهد بود. افراد نرم افزار نیستند و چنین ترسیم هایی به طور غیر قابل اجتنابی دارای اشتباه خواهد بود و این اشتباهات کمتر از ترسیم به روش فن تقریبی نخواهد بود. با تمرین فرد می تواند دایره را به روش تقریبی و با دقت خوبی تقسیم نماید. (بونر، ۲۰۱۷: ۲۲۷)

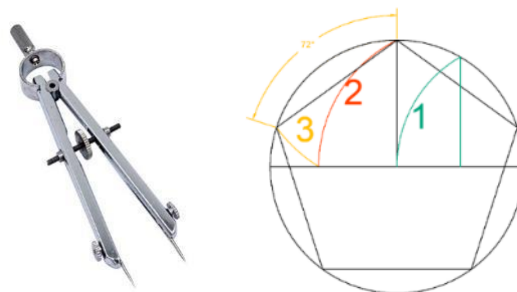
۱.۶.۴. کاهش خطا در ترسیمات دستی

در بعضی از ترسیمات پیدا نمودن شکل صحیح



تصویر ۱۱. پیاده سازی نقش هندسی مراکشی در زمینه هشت که با دو روش شبکه شطرنجی و ترسیم شعاعی و مقایسه آن در شبکه شطرنجی. (ترسیم از نگارنده)

گره‌ها را به دست می‌آورد. به نظر نگارنده این سطور در آن زمان این امر عجیب نمود زیرا روش صحیح ترسیم پنج ضلعی وجود داشت. لیکن پس از گذشت یک دهه به علت آن پی برده و مشخص شد که چرا استاد از روش صحیح استفاده نمی‌کرد. روش تقریبی تقسیم‌بندی دایره علاوه بر سرعت در ترسیم و کاهش خطا در ترسیم این امکان را می‌دهد که تمامی شمشه‌ها حتی شمشه‌های فرد نه و یازده را به راحتی ترسیم گردد.



تصویر ۱۲. پرگار تقسیم‌کننده که دو سر آن سوزن است.

تصویر ۱۳. نحوه ترسیم ۵ ضلعی به روش صحیح که در نرم افزار به صورت دقیق ترسیم می‌گردد لیکن در ترسیم دستی عموماً دچار خطا می‌شود.

۲،۶،۴. مزیت‌های محاسباتی شبکه شطرنجی ساختاری جهت پیاده‌سازی نقوش هندسی به صورت تقریبی

یکی از ویژگی‌های این شبکه شطرنجی امکان محاسبه مساحت نقوش هندسی به صورت دقیق است. هر چند آلت‌ها به صورت تقریبی صحیح هستند و نسبت به ترسیم در ساختار شعاعی میزانی انحراف از زوایا پیدا کرده‌اند لیکن این تقریب امکان بسیار مهم‌تری را در اختیار معمار جهت اجرای نقوش می‌گزارد.

باتوجه به پیاده‌سازی نقوش در شبکه شطرنجی امکان محاسبه مساحت از طریق محاسبه مربع‌ها، برای هر یک از آلات و کل نقوش بسیار تسهیل می‌گردد و دیگر نیاز به محاسبات دقیق هندسی برای اشکال

چندوجهی نیست. در این روش تعداد مربع‌ها در هر آلت مورد محاسبه قرار می‌گیرد. قسمت‌های خالی نیز برای سایر قسمت‌ها را پر می‌نماید. به توضیح دیگر باید گفت هر مربع می‌تواند عدد یک و یا نیم واحد مساحت را داشته باشد که با جمع واحدهای یک و نیم می‌توان به مساحت کل دست یافت.

روش دیگری نیز بر اساس اثبات قضیه پیک است. اگر چندضلعی ساده داشته باشیم که رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای باشند مساحت آن برابر جمع نقاط داخل شکل و نصف نقاط واقع بر مرز شکل منهای عدد یک است (لنجانی، ۱۳۹۵: ۳۴۳). فرمول $S = \frac{1}{2}p + q - 1$ به دست آوردن مساحت یک شکل را بسیار ساده کرده که مباحث اجرایی کاربرد فراوانی خواهد داشت.

در تصویر ۱۵ مساحت شمشه هشت در شبکه برابر ۲۰ خواهد بود. طبق فرمول $S = \frac{1}{2} \times 16 + 13 - 1$ برابر ۲۰ خواهد بود. (طول ضلع مربعات در تصویر یک صدم است لذا مساحت واحد ۰/۲ است). در ترسیم صحیح همین شمشه مساحت برابر ۲،۱۰۹ خواهد بود که در محاسبات جهت اجرای بنا کاری دشوار را ایجاد خواهد کرد.

در مثال بعدی آلت بلوطی ته بریده مورد محاسبه قرار گرفت که در آن هم مساحت ۱،۶ در شبکه شطرنجی و ۱،۶۴۶ در حالت ترسیم صحیح خواهد بود.

۳،۶،۴. سهولت اجرای نقوش هندسی

روش شبکه‌ای در ترسیمات معقلی و ترسیمات گره‌های هشت و شانزده کاربرد فراوانی دارد می‌تواند جهت پیاده‌سازی و اجرای نقوش نیز کاربرد داشته باشد. در بخش بالا دیدیم که چگونه استفاده از ترسیمات در شبکه شطرنجی

می‌نمود و با علم و آگاهی بر این تقریب استفاده از شبکه شطرنجی را توصیه می‌کرد. تعدادی از ترسیمات تقریبی نگارنده در ذیل آورده شده است.

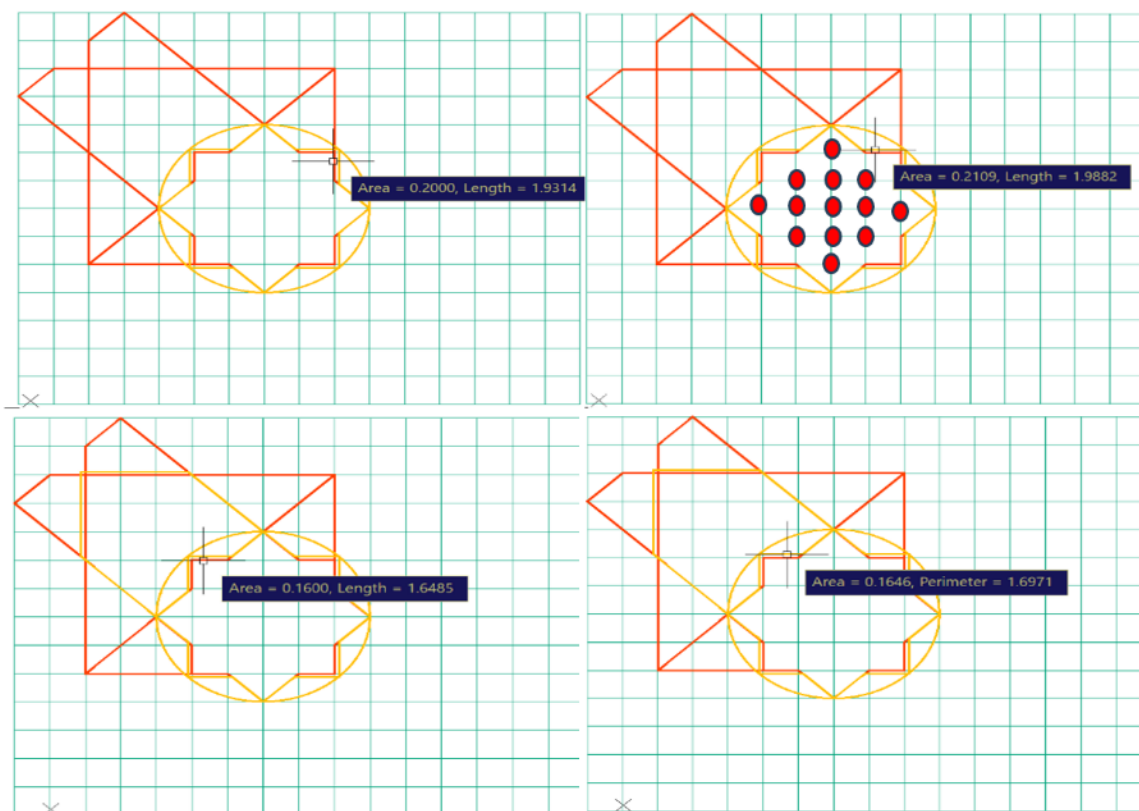
۵,۶,۴. سرعت در آموزش و سهولت در یادگیری

در آموزش نقوش هندسی پیش نیاز کار با خط و پرگار یادگیری ترسیمات مقدماتی از اشکال منتظم هندسی تا زمینه‌های مورد استفاده در ترسیمات گره شش و هشت و ده و دوازده و .. سرعت رسیدن هنرجویان را به طراحی نقوش هندسی کُند می‌کند و گاهی با توجه به پیچیدگی‌های ترسیمات خطوط زمینه در نقوش هندسی یادگیری در زمان کم را غیرممکن می‌نماید. استفاده از تخمین و شبکه‌های شطرنجی باعث می‌گردد ترسیمات زمینه یا خطوط زیرین نقوش هندسی حذف گردد و جایگزین آن شبکه شطرنجی شود.

می‌تواند در محاسبه سطح مورد نیاز کمک‌کننده باشد و در اجرا نیز برای پیاده‌سازی نقوش برای راحتی می‌توان از شبکه شطرنجی استفاده نمود و از تکرار نقوش برای بزرگ کردن نقش پرهیز کرد. شاید یکی از علل رواج کاشی هفت رنگ در معماری ایران سرعت عمل و سهولت آن در پیاده‌سازی شبکه شطرنجی بوده است.

۴,۶,۴. تسریع در پیاده‌سازی طرح‌های ذهنی

در ترسیمات تقریبی سرعت عمل بسیار بالاتر خواهد بود و این امکان را می‌دهد که ترسیمات بیشتر و متنوعی توسط هنرمند انجام شود. این امر باعث می‌گردد در نوآوری و طراحی نقوش جدید و خلاقانه در مرحله طراحی ذهنی راه هموارتری در اختیار هنرمند قرار بگیرد. پرفسور کاسترا در آموزش خود از این روش در ترسیمات گره مغربی (مراکشی) استفاده



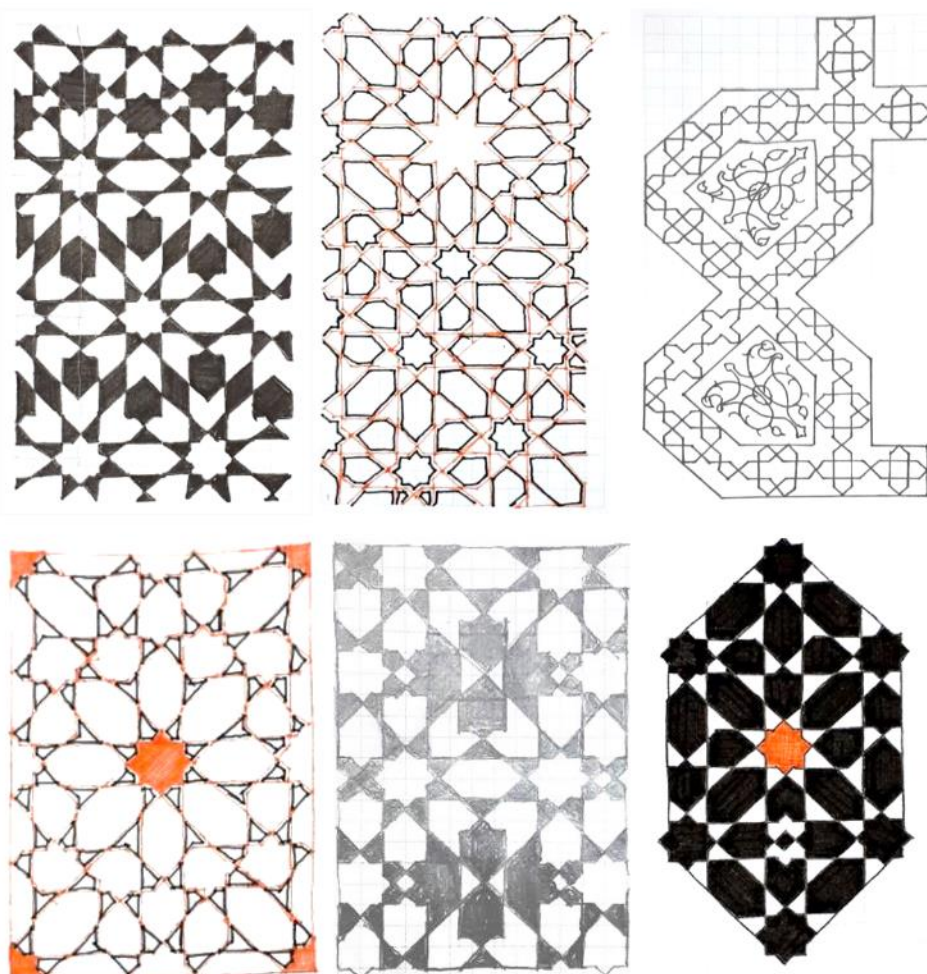
تصویر ۱۵. ترسیم شمسه هشت به روش صحیح هندسی (ترسیم از نگارنده)

تصویر ۱۴. ترسیم آلت بلوطی ته بریده به روش شبکه‌ای (ترسیم از نگارنده)

۶،۶،۴. استفاده از تقریب در سایر گره‌ها (گره‌های دست گردون و نحوه ترسیم دست آزاد نقوش هندسی با استفاده از شبکه‌های زیرین نقوش و تخمین هندسی)

اساتید معماری سستی مانند استاد لرزاده (رئیس‌زاده، ۱۳۵۸: ۱۷۸). و استاد شعرباف (شعرباف، ۱۳۸۵: ۵۴) از این روش در طراحی گره‌های دست گردان استفاده می‌نمود. مسلماً این ترسیمات به‌صورت تخمینی بوده

گره دست گردان آورده است: در ترسیم گره‌ها، آلت‌ها باید طوری در راستای یکدیگر قرار گیرند که امتداد آنها همان خطوط به‌وجودآورنده گره‌ها باشد. در گره‌های منظم این حالت خودبه‌خود به‌وجود می‌آید ولی در گره‌های دستگردان گره‌هایی که زمینه آنها از پیش داده شده و در بنا موجود است و گره باید در آن به‌وجود آید ممکن است هم شکل آلت‌ها کاملاً منظم نباشد و هم آلت‌ها در امتداد یکدیگر قرار

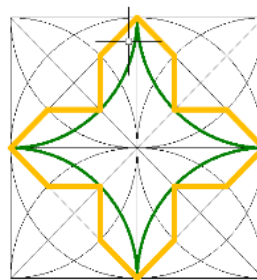
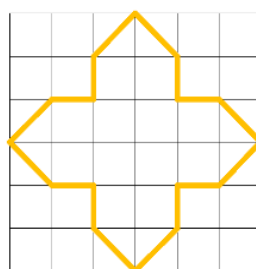


تصویر ۱۶. ترسیم شش نگاره در شبکه شطرنجی (ترسیم از نگارنده)

نگیرند هرچه مهارت استادکار بند بیشتر باشد در کارهای دستگردان نظم بیشتری به وجود می‌آید (شعرباف، ۱۳۸۵: ۱۰).

و آلات گره در این دست از گره‌ها با شکل اصلی آنها تفاوت دارد. به علت وجود زمینه‌های مشخص در ابنیه این روش کاربرد داشته است. ایشان در تعریف

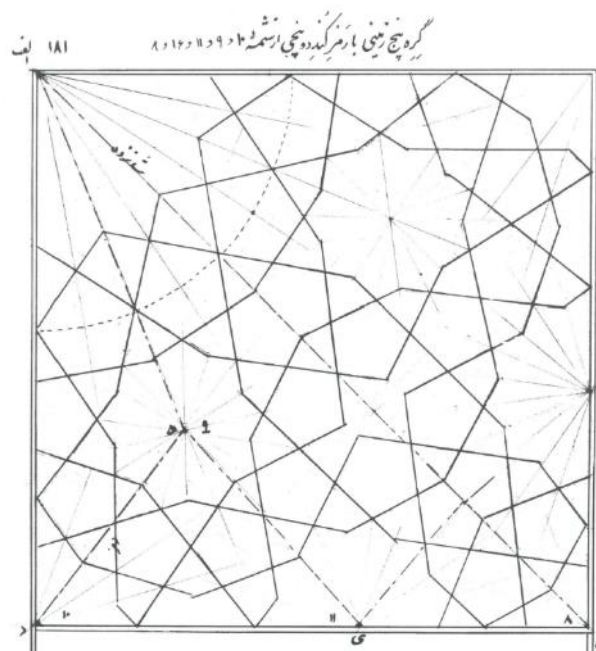
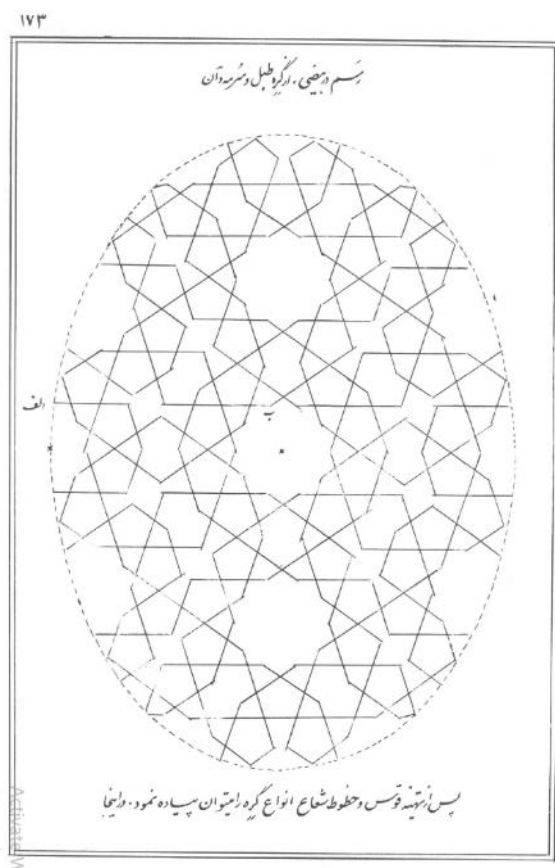
تصویر ۱۷. ترسیم چلیپا در زمینه شبکه مربع (ترسیم از نگارنده)



تصویر ۱۸. ترسیم یک چلیپا به روش خط کش و پرگاه که در آن خطوط زیر نقش به رنگ مشکی و سبز مشخص شده است.

آسان تر است و حتی شیشه بر هم با یک الگو از هر حالت می تواند کار خود را انجام و صرفه در وقت نماید. ولی در گره های شمسه زیاد برای زیبایی به وجود آمده و آثار هنری و مسائل مشکل این فن است و درک قواعد آنها استعداد زیاد می خواهد. طرح بالا ۵ زمینه کار است شمسه ۱۶ با ۸ درخت الف جیم قرار گرفته و الف به مرکز شمسه ۹ را به شمسه ۱۰ و ۱۱

باید توجه داشت که این نوع از ترسیم تقریبی کارکردهای گفته شده برای تخمین مانند سرعت در اجرا و محاسبه آسان مساحت را نداشته ولیکن حرفه مندی استاد را در زمینه های خاص نشان می دهد. استاد لرزاده در این خصوص می گوید: «اینکه آگاه شدیم که گره ده آسان تر و علت آن را فهمیدیم چرا در کار نجاری و خاتم کاری و کاشی کاری از گره ۱۰ استفاده می نمایند. گره ۱۰ آلت های



تصویر ۲۰. ترسیم گره ده و نه و شانزده و یازده و هشت با آلات گره پنج کند که آلات پس از ترسیم شعاع ها به صورت دستگردان و با مهارت استاد ترسیم شده است.

تصویر ۱۹. ترسیم گره ده طبل و سرمه دان که در زمینه بیضی دستگردان شده است و شمسه ها در گوشه ها طراحی شده است.

وصل نموده است (رئیس زاده، ۱۳۵۸: ۱۸۰).

مساوی دارد و با یک الگو می توان کارها را انجام و امتداد آنها مشکل نبوده؛ یعنی در هر مورد

۵. نتیجه‌گیری

این مقاله با تمرکز بر بررسی نقش تقریب در ترسیم نقوش هندسی سستی، نشان داد که علی‌رغم ظهور ابزارهای دقیق نرم‌افزاری، استفاده از روش‌های تقریبی در تاریخ هنر اسلامی ایران جایگاهی مستدل و هدفمند داشته است. تحلیل تطبیقی میان دو روش عمده ترسیم؛ زیرساخت شعاعی (دقیق) و زیرساخت شطرنجی (تقریبی)، بیانگر آن است که گرچه روش‌های تقریبی موجب بروز خطاهای جزئی در تناسبات و زوایا می‌شوند، اما به‌دلایلی چند از جمله کاهش خطای عملی در ترسیمات دستی، تسهیل اجرا، تسریع آموزش، کمک به خلاقیت در طراحی و امکان محاسبه ساده هندسی، به‌ویژه در قالب‌های پیچیده یا محیط‌های غیرکارگاهی، به کار گرفته شده‌اند.

با بررسی ویژگی‌های ترسیمات تقریبی در نقوش هندسی مشخص گردید محدوده استفاده از این عمل گسترده بوده و در تاریخ معماری و هنر اسلامی از آن به‌عنوان راه‌حل برخی مشکلات استفاده شده است. کاربرد تقریب در نقوش هندسی زمینه هشت و شانزده در پیاده‌سازی نقوش در شبکه شطرنجی مورد بررسی قرار گرفت و تفاوت پیاده‌سازی گره به‌وسیله ترسیمات صحیح هندسی در شبکه زیرساخت شعاعی و روش تقریبی با شبکه زیرساخت شطرنجی در یک نمونه موردی بصورت واضح نشان داده شد. سپس با بررسی ترسیمات تقریبی در شبکه زیرساخت شبکه‌ای تحلیلی از دلایل استفاده از این روش بدست آمد و مشخص گردید با اینکه این روش ترسیمات دقیقی را به همراه ندارد و ممکن است خطاهایی را در ترسیم نشان دهد که با چشم نیز قابل تشخیص باشد لیکن مزیت‌هایی را به دنبال دارد استفاده از تقریب را توجیه‌پذیر می‌نماید. این

بررسی‌ها مزیت‌هایی در طراحی نقوش هندسی را مشخص نمود از جمله سهولت در بازترسیم نقوش هندسی استفاده شده در ابنیه تاریخی و سرعت در آموزش و سهولت در یادگیری هنرجویان، تسریع در پیاده‌سازی طرح‌های نوآورانه و جدید ذهنی هنرمند در شبکه شطرنجی.

استفاده از شبکه شطرنجی برای اجرای نقوش هندسی بر روی چوب و فلز و شیشه نیز سهولت اجرا را به‌همراه می‌آورد. از جمله این موارد مزیت‌های محاسباتی شبکه شطرنجی جهت پیاده‌سازی نقوش هندسی بود که باعث می‌شود در اجرای نقوش بتوان میزان مصالح و رنگ و... به‌طور دقیق و به روشی ساده محاسبه نمود. همچنین در پیاده‌سازی نقوش در ابعاد مختلف و مقیاس‌های متفاوت هنرمند بسیار راحت‌تر می‌تواند به روشی ساده نقش را در زمینه مورد نظر و با ابزاری ساده پیاده نماید.

نتایج این تحقیق حاکی از آن است که بهره‌گیری از شبکه‌های شطرنجی به‌عنوان ساختاری ساده اما قابل‌اتکا، نه‌تنها موجب گسترش خلاقیت در خلق نقوش هندسی جدید شده، بلکه امکان محاسبه‌های تقریبی مساحت و تکرار الگوها را نیز تسهیل کرده است. همچنین این رویکرد در آموزش‌های معاصر و کاربردهای اجرایی در مصالح گوناگون مانند کاشی، چوب و شیشه همچنان کاربرد دارد. براین‌اساس، تقریب نه به‌عنوان نقص، بلکه به‌عنوان روشی با کارکردهای هنری، فنی و آموزشی موجه در ترسیم نقوش هندسی سستی مطرح می‌گردد؛ روشی که پیوند میان محدودیت ابزار سستی و ضرورت دقت هندسی را با خلاقیت و سادگی اجرایی تلفیق می‌کند.

1. Polygonal method
 2. Jay Francis Bonner
 3. Mirak Majewski
 4. <https://patterninislamicart.com/drawings-diagrams-analyses/7/mirza-akbar-architectural-scrolls>
 5. <http://www.castera.net/entrelacs/entrelacs.html>
 6. Jean-Marc Castera
- ۷ این کلاس‌ها در دانشکده معماری و شهرسازی دانشکده علم و صنعت برگزار گردید و نگارنده در آن حضور داشته است.
- ۸ استاد علی اصغر شعراباف، استاد برجسته هنرهای وابسته به معماری، مانند گره چینی و کاسه‌سازی و مقرنس و کاربردی است. از جمله فعالیت‌های معماری وی می‌توان اجرای بخشی از تزئینات در مسجد جامع ساوه، مسجد اعظم قم، مسجد سپهسالار، مدرسه سپهسالار (شهید مطهری)، امامزاده زید تهران، مسجد حضرت ابراهیم، نمایشگاه بین‌المللی تهران را نام برد.
- ۹ کلاس آموزش نقوش هندسی و مقرنس در سال ۱۳۸۶ در فرهنگستان هنر برگزار شد و استاد شعراباف به آموزش ترسیم نقوش هندسی تا اجرای آنها بر روی لوح گچی اقدام کردند. نگارنده در این کلاس‌ها طراحی نقوش هندسی دستگردان و ترسیم تقریبی نقوش توسط استاد شعراباف را مشاهده کرد.

کتابنامه

- حاجبی، بیتا؛ امین‌پور، احمد؛ اولیا، محمدرضا، ابویی، رضا (۱۳۹۵). «رسم گره کند طبل قناس با استفاده از روش‌های ابداعی پارامتریک»، صفحه ۱۲۶-۱۰۹، ۱۲۴.
- https://soffeh.sbu.ac.ir/article_100303_en.html

- حاجی قاسمی، و نوایی (۱۳۹۰). خشت و خیال، تهران: سروش.
- رئیس‌زاده، م (۱۳۹۸). *احیای هنرهای از یادرفته معماری اسلامی*، ج اول، تهران: مولی.
- <https://www.iranketab.ir/book/47092-ehya-ye-honar-haye-az-yad-rafteh>
- زمانی لنگانی، . (۱۳۹۵). *هندسه در هنر معماری*، سازمان فرهنگی تفریحی شهرداری اصفهان.
- شاکر سلمان، عامر (۱۳۸۳). *هم آراستگی در نگاره‌های اسلامی*، ترجمه آمنه آقاریع، تهران: به‌نشر.
- شفایی، ج (۱۳۹۹). *هنر گره‌سازی در معماری و درودگری* (دوره ۳ جلدی)، تهران: انجمن مفاخر فرهنگی.
- طاهری، ج (۲۰۱۱). «نقدی بر تحقیق و تصحیح» ترجمه النجاره، بوزجانی، کتاب ماه علوم و فنون، ۵۳.
- <http://noo.rs/10jiZ>
- کشاوری میاندشتی، حمیدرضا (۱۳۹۸). *بنای خط بنایی*. آرما.
- گلپار، م (۱۳۹۹). *دفتر گره: روش طراحی گره‌ها در معماری اسلامی ایران*، تهران: میراث اهل قلم.
- ماهرالنقش، م (۱۳۶۱). *کاشی‌کاری در ایران دوره اسلامی*، تهران: شرکت افست.
- نجیب اوغلو، گ (۱۳۸۹). *هندسه و تزئین در معماری اسلامی*، ترجمه قیومی بیدهندی، تهران: روزنه.
- Bodner, B. L (2012). From Sultaniyeh to Tashkent Scrolls: Euclidean Constructions of Two Nine- and Twelve-Pointed Interlocking Star Polygon Designs. *Nexus Network Journal*, 14(2), 307–332.
- <https://doi.org/10.1007/s00004-012-0111-y>
- Bonner, J (2017). *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Construction* (1st ed.). Springer.
- Necipoğlu, G (Ed.). (2017). *The Arts of Ornamental Geometry*. Brill.
- <https://doi.org/9789004315204/10,1163>
- Necipoglu, G., & al-Asad, M. (1996). *The Topkapi Scroll—Geometry and Ornament in Islamic Architecture* (1st

edition). Oxford University Press.
<https://www.getty.edu/publications/resources/virtuallibrary/9780892363353.pdf>
Majewski, M. (2022) Understanding Geometric Pattern and its Geometry, Part 7—What can go wrong? The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 16, 73–91.